

接ベクトル空間

イ・サンフ*

2026年5月16日

1 接空間とその基底

定義

M を C^∞ 級多様体とする. 点 $p \in M$ における接ベクトル全体の集合を $T_p M$ と書くことにする. この $T_p M$ を, $p \in M$ における M の接ベクトル空間または接空間 (Tangent space) という.

以下では, p の近傍 $U \subset M$ と座標写像 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ を選び, $\varphi(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q))$ と書く.

定理 2.3.1

n 個の接ベクトルの組

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

は $T_p M$ の 1 つの基底である. よって, 特に $\dim T_p M = n$ である.

これを示すために,

$$T_p M = \text{span} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \mid a^i \in \mathbb{R} \right\}$$

を証明する.

証明は次の三段階で行う.

Step 1 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$ が 1 次独立であることを示す.

Step 2 任意の $v \in T_p M$ について, 定数関数の微分が 0 であることを確認する.

Step 3 任意の $v \in T_p M$ について, ある $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$v = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

と書けることを示す. つまり, これを示すことで, $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$ が $T_p M$ を生成することが分かる.

*sanghu.lee@toki.waseda.jp

1.1 座標関数の滑らかさ

命題

座標関数 x^i は C^∞ 級である.

証明

座標写像 φ について, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ と書く. このとき, 合成写像

$$(x^i \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

は $\varphi(p) \mapsto x^i(p) \in \mathbb{R}$ と表される. すなわち, 座標表示において第 i 成分を取り出す写像であるから, C^∞ 級である.

1.2 定数関数の微分

補題

任意の $v \in T_p M$ と任意の定数関数 c について, $v(c) = 0$ である.

証明

Leibniz 則より

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + v(1) \cdot 1 = 2v(1)$$

である. したがって $v(1) = 0$ である. ゆえに線形性より, $v(c) = v(c \cdot 1) = cv(1) = 0$ を得る.

1.3 Taylor 展開

補題

任意の $f \in C^\infty(M)$ について, $x_0^i = x^i(p)$ とおけば, p の近くで

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f(x^i(q) - x_0^i) \\ &\quad + \sum_{i,j} G_{ij}(x(q))(x^i(q) - x_0^i)(x^j(q) - x_0^j) \end{aligned}$$

と書ける. ただし, G_{ij} は滑らかな関数である.

証明 (略)

2 定理 2.3.1 の証明

2.1 Step 1 : 1 次独立性

$$\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = 0$$

とする．ここで右辺の 0 は接空間 $T_p M$ における零ベクトルである．この等式の両辺を座標関数 x^j に作用させると，

$$\left[\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right] (x^j) = 0(x^j) = 0$$

である．一方で，左辺は

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right] (x^j) &= \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p x^j \\ &= \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} (x^j \circ \varphi^{-1}) \Big|_{x=\varphi(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n a^i \delta_i^j = a^j \end{aligned}$$

である．ただし， δ_i^j は Kronecker のデルタである．

したがって， $a^j = 0$ である．これは任意の $j = 1, \dots, n$ について成り立つので， $a^1 = \dots = a^n = 0$ を得る．よって， $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$ は 1 次独立である．

2.2 Step 2 : $v(c) = 0$

前節より，任意の $v \in T_p M$ と任意の定数関数 c について， $v(c) = 0$ である．

2.3 Step 3 : 生成系

任意に $v \in T_p M$ をとる．任意の $f \in C^\infty(M)$ について，Taylor 展開に v を作用させる．定数項については $v(f(p)) = 0$ である．また， $q = p$ のとき $x^i(q) - x_0^i = x^i(p) - x_0^i = 0$ であるから，Leibniz 則により二次以上の剰余項は消える．実際，

$$\begin{aligned} &v \left(G_{ij}(x(q)) (x^i(q) - x_0^i) (x^j(q) - x_0^j) \right) \\ &= v \left(G_{ij}(x(q)) (x^i(p) - x_0^i) (x^j(p) - x_0^j) \right) \\ &\quad + G_{ij}(x(p)) v(x^i(q) - x_0^i) (x^j(p) - x_0^j) \\ &\quad + G_{ij}(x(p)) (x^i(p) - x_0^i) v(x^j(q) - x_0^j) = 0 \end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f \cdot v(x^i) \\ &= \sum_{i=1}^n v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f \end{aligned}$$

を得る．ここで $a^i = v(x^i)$ とおけば，

$$v(f) = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p f$$

である. これは任意の $f \in C^\infty(M)$ について成り立つので,

$$v = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

である. よって, $\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$ は $T_p M$ を生成する.

以上より,

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$$

は $T_p M$ の基底である. したがって, $\dim T_p M = n$ であることは示された.