

曲線に沿った平行ベクトル場と平行移動

イ・サンフ*

2026年6月13日

1 曲線に沿った平行ベクトル場

M を C^∞ 級多様体とし, $p: [a, b] \rightarrow M$ を滑らかな曲線とする. この曲線の像を

$$C = \{p(t) : a \leq t \leq b\}$$

とおく. また, 考えている範囲で局所座標を取り,

$$\varphi(p(t)) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

と表す. このとき曲線の速度ベクトルは

$$\dot{p}(t) = \dot{x}^i(t)(\partial_i)_{p(t)}$$

である.

曲線 C に沿ったベクトル場 Z とは, 各 $t \in [a, b]$ に対して $Z_{p(t)} \in T_{p(t)}M$ を対応させるものである. 局所座標のもとでは

$$Z_{p(t)} = Z^k(t)(\partial_k)_{p(t)}$$

と表される.

定義

曲線 $C = \{p(t) : a \leq t \leq b\}$ に沿ったベクトル場 Z が平行であるとは, すべての $t \in [a, b]$ について

$$\nabla_{\dot{p}(t)} Z = 0$$

が成り立つことをいう. ただし, 右辺の 0 は $T_{p(t)}M$ における零ベクトル, すなわち $C^\infty(M)$ に作用する零微分作用素である.

2 平行条件の座標表示

$Z_{p(t)} = Z^k(t)(\partial_k)_{p(t)}$ とする. 局所的に $Z = Z^k \partial_k$ と表し, 曲線上では $Z^k(t) = Z^k(p(t))$ と書く. 共変微分の線形性と Leibniz 則より,

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{p}(t)} Z &= \nabla_{\dot{x}^i(t)(\partial_i)_{p(t)}} (Z^j(t)(\partial_j)_{p(t)}) \\ &= \dot{x}^i(t) \{ (\partial_i Z^k)(p(t))(\partial_k)_{p(t)} + Z^j(t)(\nabla_{\partial_i} \partial_j)_{p(t)} \}. \end{aligned}$$

*sanghu.lee@toki.waseda.jp

接続係数を $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ で定める. このとき $(\nabla_{\partial_i} \partial_j)_{p(t)} = \Gamma_{ij}^k(p(t))(\partial_k)_{p(t)}$ であるから,

$$\nabla_{\dot{p}(t)} Z = \{ \dot{x}^i(t)(\partial_i Z^k)(p(t)) + \dot{x}^i(t) Z^j(t) \Gamma_{ij}^k(p(t)) \} (\partial_k)_{p(t)}.$$

ここで $Z^k(t) = Z^k(p(t))$ と書いているので, chain rule より

$$\dot{x}^i(t)(\partial_i Z^k)(p(t)) = \frac{d}{dt} Z^k(p(t)) = \dot{Z}^k(t).$$

したがって,

$$\nabla_{\dot{p}(t)} Z = \left(\dot{Z}^k(t) + \dot{x}^i(t) Z^j(t) \Gamma_{ij}^k(p(t)) \right) (\partial_k)_{p(t)}$$

を得る.

以上から, Z が C に沿って平行であることは, すべての $t \in [a, b]$ について

$$\left(\dot{Z}^k(t) + \dot{x}^i(t) Z^j(t) \Gamma_{ij}^k(p(t)) \right) (\partial_k)_{p(t)} = 0$$

が成り立つことと同値である. $(\partial_1)_{p(t)}, \dots, (\partial_n)_{p(t)}$ は $T_{p(t)} M$ の基底であるから, これは各成分について

$$\boxed{\dot{Z}^k(t) + \dot{x}^i(t) Z^j(t) \Gamma_{ij}^k(p(t)) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)}$$

が成り立つことと同値である. ここで右辺の 0 は, 各成分における実数 0 である.

補足: 線形微分方程式としての平行条件

未知関数は $Z^1(t), \dots, Z^n(t)$ の n 個である. 一方, 曲線 $p(t)$ が固定されていれば, $\dot{x}^i(t)$ と $\Gamma_{ij}^k(p(t))$ は既に与えられた関数である.

ここで

$$A_j^k(t) := -\dot{x}^i(t) \Gamma_{ij}^k(p(t))$$

とおくと, 平行条件は

$$\dot{Z}^k(t) = A_j^k(t) Z^j(t)$$

と書ける. 接続係数 Γ_{ij}^k は n^3 個の成分を持つが, 曲線の速度 $\dot{x}^i(t)$ と添字 i について縮約されることで, $Z^j(t)$ にかかる $n \times n$ 行列 $A(t) = (A_j^k(t))$ が得られる.

よって, 曲線と接続が与えられ, 初期条件 $Z(a) = v$ が与えられると, 線形微分方程式の解は一意に存在するので, 平行ベクトル場 $Z(t)$ は一意に定まる.

3 平行移動

以下では, $p(a) = p$, $p(b) = q$ を満たす滑らかな曲線

$$C = \{p(t) : a \leq t \leq b\}$$

を固定する. $v \in T_p M$ に対して, $Z(a) = v$ かつ $\nabla_{\dot{p}(t)} Z = 0$ を満たす曲線に沿ったベクトル場 Z を考える. 上で見たように, これは線形微分方程式の初期値問題であり, その解は一意に存在する.

そこで、終点 $q = p(b)$ における値 $Z(b) \in T_q M$ を v の平行移動の結果とし、

$$\pi_q^p(v) := Z(b)$$

と定義する。この写像

$$\pi_q^p : T_p M \rightarrow T_q M$$

を、曲線 C に沿った平行移動という。ここでは曲線 C を固定しているため、記号には C を明示しない。

4 平行移動が線形同型であること

命題

曲線 C を固定すると、平行移動

$$\pi_q^p : T_p M \rightarrow T_q M$$

は線形同型写像である。

証明

Step 1: 線形性

$u, v \in T_p M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとる。 u, v を初期値とする平行ベクトル場をそれぞれ Z_u, Z_v と書く。すなわち、 $Z_u(a) = u$, $Z_v(a) = v$ かつ $\nabla_{\dot{p}} Z_u = \nabla_{\dot{p}} Z_v = 0$ である。

$W(t) = \alpha Z_u(t) + \beta Z_v(t)$ とおくと、共変微分の線形性より

$$\nabla_{\dot{p}} W = \alpha \nabla_{\dot{p}} Z_u + \beta \nabla_{\dot{p}} Z_v = 0$$

であり、 $W(a) = \alpha u + \beta v$ である。解の一意性より、 W は $\alpha u + \beta v$ を初期値とする平行ベクトル場である。したがって

$$\pi_q^p(\alpha u + \beta v) = W(b) = \alpha \pi_q^p(u) + \beta \pi_q^p(v).$$

よって π_q^p は線形である。

Step 2: 単射性

$\pi_q^p(u) = \pi_q^p(v)$ とする。これは、対応する平行ベクトル場 Z_u, Z_v について $Z_u(b) = Z_v(b)$ が成り立つことを意味する。線形微分方程式の解の一意性を終点 b を初期時刻として用いれば、 $Z_u = Z_v$ である。したがって $u = Z_u(a) = Z_v(a) = v$ となる。ゆえに π_q^p は単射である。

Step 3: 全射性

任意の $w \in T_q M$ をとる。終点条件 $Z(b) = w$ を満たす平行ベクトル場 Z を考える。座標表示では

$$\dot{Z}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(p(t)) \dot{x}^i(t) Z^j(t) = 0, \quad Z^k(b) = w^k$$

という線形微分方程式の終端値問題である。この終端値問題にも解が一意に存在する。このとき $Z(a) \in T_p M$ であり、

$$\pi_q^p(Z(a)) = Z(b) = w$$

である。よって π_q^p は全射である。

以上より、 π_q^p は線形かつ全単射である。したがって線形同型写像である。□