

測地線と Levi-Civita 接続

イ・サンフ *

2026 年 7 月 7 日

1 測地線の方程式

(M, g, ∇) を考える. 曲線 $C = (p_t)$ について

$$p_0 = p, \quad p_1 = q$$

とする.

Review : 測地線 (p.64, ex.3.2.1)

$C = (p_t)$ が ∇ -測地線であることは, 次の条件と同値である.

$$C = (p_t) \text{ が } \nabla\text{-測地線}$$

$$\iff \nabla_{\dot{p}_t} \dot{p}_t = 0.$$

また, $X \in \mathfrak{X}(M)$ を, $C = (p_t)$ 上で

$$X_{p_t} = \dot{p}_t$$

を満たすように取る. このとき

$$\nabla_{\dot{p}_t} \dot{p}_t = 0 \iff (\nabla_{\dot{p}_t} X)_{p_t} = 0$$

である. さらに局所座標では

$$X_{p_t} = \dot{p}_t \iff X^k(p_t)(\partial_k)_{p_t} = \dot{x}_t^k(\partial_k)_{p_t}$$

である. したがって各 k について

$$X^k(p_t) = \dot{x}_t^k$$

であり, p_t は X の積分曲線である.

局所座標 φ を取り,

$$\varphi(p_t) = x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n), \quad \dot{p}_t = \dot{x}_t^i(\partial_i)_{p_t}$$

と書く. 接続係数を

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

*sanghu.lee@toki.waseda.jp

で定めると,

$$\nabla_{\dot{p}_t} \dot{p}_t = \left(\ddot{x}_t^k + \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j \Gamma_{ij}^k(p_t) \right) (\partial_k)_{p_t}.$$

よって, 測地線方程式は

$$\ddot{x}_t^k + \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j \Gamma_{ij}^k(p_t) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

である.

2 Euler–Lagrange 方程式とエネルギー

Euler–Lagrange 方程式

端点を固定した曲線 $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n)$ について

$$L[x_t] = \int_0^1 f(x_t, \dot{x}_t) dt$$

を考える. x_t が

$$x_t \in \operatorname{argmin}_{\tilde{x}_t} L[\tilde{x}_t] \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \tilde{x}_0 = a, \\ \tilde{x}_1 = b \end{cases}$$

を満たすならば, x_t が満たすべき 1 階条件は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k}(x_t, \dot{x}_t) \right) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_t, \dot{x}_t) \quad (k = 1, \dots, n)$$

である. 導出は省略する.

Riemann 計量 g について

$$g_{ij}(p) := g_p((\partial_i)_p, (\partial_j)_p)$$

と書く. このとき

$$\|\dot{p}_t\|^2 = g_{ij}(p_t) \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j$$

であり, エネルギー汎関数は

$$\mathcal{E}[p_t] = \int_0^1 \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{dt} p_t \right\|^2 dt = \int_0^1 \frac{1}{2} g_{ij}(p_t) \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j dt$$

である. 以下では, 最短距離問題を最小エネルギー問題として扱う.

3 Levi-Civita 接続係数の導出

証明

エネルギー汎関数に対応する関数 f を

$$f(x_t, \dot{x}_t) = \frac{1}{2} g_{ij}(p_t) \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j$$

とおく．ただし $\partial_k = \partial/\partial x^k$ とする．以下では t を省略して書く．まず，

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_t, \dot{x}_t) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{1}{2} g_{ij}(p_t) \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j \right] = \frac{1}{2} \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j (\partial_k g_{ij})_{p_t}.$$

また，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k}(x_t, \dot{x}_t) &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \left[\frac{1}{2} g_{ij}(p_t) \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j \right] \\ &= \frac{1}{2} g_{kj}(p_t) \dot{x}_t^j + \frac{1}{2} g_{ik}(p_t) \dot{x}_t^i. \end{aligned}$$

右辺の第 2 項は， $g_{ik} = g_{ki}$ とダミー添字の付け替えにより第 1 項と同じ形に書ける．ただし，以下では計算の対応を見やすくするため，この形のまま微分する．したがって，chain rule より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k}(x_t, \dot{x}_t) \right] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} g_{kj}(p_t) \dot{x}_t^j + \frac{1}{2} g_{ik}(p_t) \dot{x}_t^i \right] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj})_{p_t} \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j + \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik})_{p_t} \dot{x}_t^j \dot{x}_t^i \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{kj}(p_t) \ddot{x}_t^j + \frac{1}{2} g_{ik}(p_t) \ddot{x}_t^i. \end{aligned}$$

最後の 2 項は， $g_{ik} = g_{ki}$ とダミー添字の付け替えにより

$$\frac{1}{2} g_{kj}(p_t) \ddot{x}_t^j + \frac{1}{2} g_{ik}(p_t) \ddot{x}_t^i = g_{k\ell}(p_t) \ddot{x}_t^\ell$$

にまとめられる．よって Euler–Lagrange 方程式より，

$$\frac{1}{2} (\partial_k g_{ij})_{p_t} \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j = \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj})_{p_t} \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j + \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik})_{p_t} \dot{x}_t^j \dot{x}_t^i + g_{k\ell}(p_t) \ddot{x}_t^\ell.$$

これを整理すると，

$$\boxed{g_{k\ell}(p_t) \ddot{x}_t^\ell + \frac{1}{2} \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})_{p_t} = 0}$$

を得る．

一般に，行列 $A = [a_{ij}]$ の逆行列を $A^{-1} = [a^{ij}]$ と表す．ここでは

$$[g_{k\ell}]^{-1} = [g^{k\ell}]$$

と書く．上の式の両辺に $[g_{k\ell}]^{-1}$ をかけると，

$$\ddot{x}_t^\ell + \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j \left[\frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{k\ell} \right]_{p_t} = 0.$$

したがって

$$\boxed{\Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{k\ell}}$$

とおけば，測地線方程式

$$\ddot{x}_t^\ell + \Gamma_{ij}^\ell(p_t) \dot{x}_t^i \dot{x}_t^j = 0$$

を得る．この接続を Riemann 計量 g の **Levi-Civita 接続** という．

4 平行移動と内積の保存

曲線 $C = (p_t)$ を固定し, $p_0 = p$ とする. $v, w \in T_p M$ に対して

$$Y_t := \pi_{p_t}^p v, \quad Z_t := \pi_{p_t}^p w$$

とおく. つまり

$$\nabla_{\dot{p}_t} Y_t = 0, \quad \nabla_{\dot{p}_t} Z_t = 0$$

である.

定理

∇ が Levi-Civita 接続ならば, 任意の $v, w \in T_p M$ について

$$g_{p_t}(Y_t, Z_t) = g_p(v, w)$$

が成り立つ. したがって, 平行移動は内積 (角度) を保つ.

証明

$Y_t = Y_t^i (\partial_i)_{p_t}$, $Z_t = Z_t^j (\partial_j)_{p_t}$ と書く. 平行条件は

$$\dot{Y}_t^\ell + \dot{x}_t^k Y_t^i \Gamma_{ki}^\ell(p_t) = 0, \quad \dot{Z}_t^\ell + \dot{x}_t^k Z_t^j \Gamma_{kj}^\ell(p_t) = 0$$

である. いま

$$g(Y_t, Z_t) = g_{ij}(p_t) Y_t^i Z_t^j$$

なので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(Y_t, Z_t) &= \frac{d}{dt} [g_{ij}(p_t) Y_t^i Z_t^j] \\ &= (\partial_k g_{ij})_{p_t} \dot{x}_t^k Y_t^i Z_t^j + g_{ij}(p_t) \dot{Y}_t^i Z_t^j + g_{ij}(p_t) Y_t^i \dot{Z}_t^j. \end{aligned}$$

平行条件を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(Y_t, Z_t) &= (\partial_k g_{ij})_{p_t} \dot{x}_t^k Y_t^i Z_t^j - \Gamma_{ki}^\ell(p_t) g_{\ell j}(p_t) \dot{x}_t^k Y_t^i Z_t^j \\ &\quad - \Gamma_{kj}^\ell(p_t) g_{i\ell}(p_t) \dot{x}_t^k Y_t^i Z_t^j \\ &= (\partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki,j} - \Gamma_{kj,i})_{p_t} \dot{x}_t^k Y_t^i Z_t^j. \end{aligned}$$

ただし

$$\Gamma_{ki,j} := \Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j}, \quad \Gamma_{kj,i} := \Gamma_{kj}^\ell g_{i\ell}$$

とおいた. Levi-Civita 接続係数の式より

$$\begin{aligned} \Gamma_{ki,j} &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}), \\ \Gamma_{kj,i} &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}). \end{aligned}$$

したがって

$$\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i} = \partial_k g_{ij}$$

であるから,

$$\frac{d}{dt}g(Y_t, Z_t) = 0.$$

よって $g(Y_t, Z_t)$ は t によらない定数である. $t = 0$ を代入して,

$$g_{p_t}(Y_t, Z_t) = g_p(v, w)$$

を得る.

5 Levi-Civita 接続の特徴づけ

定理

Riemann 計量 g に対して, 次の 2 条件を満たす接続 ∇ が一意に存在する. これを Levi-Civita 接続という.

$$\begin{cases} X[g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0. \end{cases}$$

すなわち, Levi-Civita 接続とは, 計量的で, ねじれを持たない唯一の接続である.

座標表示では, $\Gamma_{ij,k} := \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k}$ とおくと,

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

証明は省略する.